Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 23.09.2013.

Pismeni ispit iz predmeta Linearna algebra

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Neka je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1, a_2, ..., a_n)^\top$ fiksirani vektor iz $\mathcal{V}$. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ iz $\mathcal{V}$ sa osobinom $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ vektorski podprostor prostora $\mathcal{V}$. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathcal{V} \,|\, a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$$

vektorski podprostor od $\mathcal{V}$. Odrediti bazu i dimenziju ovog podprostora.

2. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m \times n$ matrica. Pokazati da je funkcija definisana sa

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$$

unutrašnji (skalarni) proizvod na prostoru $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

3. Posmatrajmo sljedeći skup od tri vektora

$$\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(20%)(a) Koristeći standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^4$ provjeriti da li su ovi vektori međusobno ortogonalni.

(50%)(b) Pronaći nenula vektor x_4 tako da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup međusobno ortogonalnih vektora.

(30%)(c) Pretvoriti dobijeni skup u ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^4$.

4. Zadana je linearna transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'))$ u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, te mu odredite po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).

(#) Neka je $V=\mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ fiksirani vektor iz V. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ iz V sa osobinom $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ vektorski podprostor prostora V. Drugim riječima da je

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in V \;\middle|\; a_1x_1+\dots+a_nx_n=0\right\}$$

vektorski podprostor od V. Odrediti dimenziju i bazu ovog podprostora.

Rj.

Prisjetimo se:

Neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora V je podprostor od V ako i samo ako

(A1) $x, y\in\mathcal{S} \Rightarrow x+y\in\mathcal{S}$;

(M1) $x\in\mathcal{S} \Rightarrow \alpha x\in\mathcal{S}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

Pa pokažimo da vrijede osobine (A1) i (M1).

Izaberimo proizvoljne elemente $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in M$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Tada

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}.$$

Uvedimo oznake $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in M \Leftrightarrow a_1x_1+\dots+a_nx_n=0 \Leftrightarrow a^T x=0$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in M \Leftrightarrow a_1y_1+\dots+a_ny_n=0 \Leftrightarrow a^T y=0$$

$$a^Tx+a^Ty=0 \Leftrightarrow a^T(x+y)=0 \Rightarrow x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\in M$$

Prema tome vrijedi (A1)

$$\alpha\cdot x = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

$$a^T x = 0 \Rightarrow a^T \alpha x = 0 \Rightarrow \alpha x \in M$$ vrijedi (M1)

M jest vektorski podprostor

Da bi odredili bazu i dimenziju napišimo M u drugačijem obliku

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a^T x = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \ker\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Prema tome $M = \ker(A)$ gdje je $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

Znamo da kolone iz opšteg rješenja od $\ker(A)$ formiraju bazu za $\ker(A)$. Pretpostavimo da je $a \neq 0$. Kako je $\operatorname{rang}(A) = 1$ ako posmatramo sistem $Ax = 0$ to moramo uzeti $n-1$ promjenjivu proizvoljno. Pretpostavimo da je $a_1 \neq 0$, kako je $a \neq 0$ to $\exists a_i \neq 0$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

$$x_1 = \frac{a_2}{a_1}x_2 + \dots + \frac{a_n}{a_1}x_n$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{a_1}x_2 + \dots + \frac{a_n}{a_1}x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Prema tome $\dim(M) = n-1$ i

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

je baza za M.

(#) Posmatrajmo vektorski prostor $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m\times n$ matrica. Pokazati da je f-ja definisana sa

$$<A,B> = trag(A^T B)$$

unutrašnji proizvod za $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.
(Ovaj proizvod je poznat pod imenom standardni unutrašnji proizvod za matrice). $\boxed{trag(A) = \text{suma dijagonalnih elemenata matrice } A}$

Rj. Trebamo provjeriti da li vrijede četri osobine unutrašnjeg proizvoda.

(i) $<A,A> \in \mathbb{R}$, $<A,A> \geq 0$ i $<A,A> = 0$ akko $A = \mathbf{0}$.

$$<A,A> = trag(A^T A) = trag\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{n2}^2) + \dots + (a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{nn}^2) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{ij}^2}_{\in\mathbb{R}}}_{\in\mathbb{R}} \geq 0$$ i vidimo da $<A,A> = 0$ akko $A = \mathbf{0}$

vrijedi prva osobina

(ii) $<x, \alpha y> = \alpha <x,y>$ za svaki skalar α

$$<A, \alpha B> = trag(A^T \cdot \alpha B) = \alpha\, trag(A^T B) = \alpha <A,B>$$

vrijedi druga osobina

(iii) $<x, y+z> = <x,y> + <x,z>$

Primjetimo da je $trag(A^T B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ (ZAŠTO?)

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+\dots+a_{n1}b_{n1} & \square & \dots & \square \\ \square & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{n2}b_{n2} & & \square \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \square & \square & \dots & a_{1n}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
\langle A, B+C \rangle = \operatorname{trag}(A^T(B+C)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}+c_{ij}) =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \operatorname{trag}(A^TB) + \operatorname{trag}(A^TC)
$$

$$
= \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle
$$ vrijedi treća osobina

(iv) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (za kompleksan vekt. prost. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$)

ZA VJEŽBU

Data f-ja jest unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(#) Posmatrajmo sljedeći skup od tri vektora

$$\left\{ x_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\ x_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ x_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Koristeći standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^4$ provjeriti da li su ovi vektori međusobno ortogonalni.

(b) Pronaći nenula vektor x_4 tako da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup međusobno ortogonalnih vektora.

(c) Pretvoriti dobijeni skup u ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^4$.

Rj. (a) Dva vektora u i v su međusobno ortogonalna akko $\langle u,v\rangle=0$, što označavamo sa $u \perp v$.

za $\mathbb{R}^4$ $\quad \langle u,v\rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{4} u_i v_i$

$\langle x_1, x_2\rangle = 1-1+0+0=0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_2$

$\langle x_1, x_3\rangle = -1+1+0+0=0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \perp x_3$

$\langle x_2, x_3\rangle = -1-1+2+0=0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \perp x_3$

Dati vektori su međusobno ortogonalni.

(b) Trebamo pronaći vektor $x_4=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}$ t.d. $x_1 \perp x_4$, $x_2 \perp x_4$, $x_3 \perp x_4$ tj. $x_1^T x_4=0$, $x_2^T x_4=0$ i $x_3^T x_4=0$:

$$\begin{aligned} \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_4&=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=0\\ -\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3&=0 \end{aligned}$$

$$\bar{A}=[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1&-1&0&2&0\\ 1&1&1&0&0\\ -1&-1&2&0&0 \end{array}\right] \begin{array}{l} II_v-I_v\\ III_v+I_v \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III_v + II_v} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$rang\,\bar{A} = 3 = rang\,A < 4 =$ br. nepoznatih

sistem ima ∞ mnogo rješenja, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

$\alpha_3 = 0$

$2\alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \implies \alpha_2 = \alpha_4 = t$

$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0$

$\alpha_1 = -t$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\|x_1\| = \sqrt{1+1+0+4} = \sqrt{6}$, $\quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|x_2\| = \sqrt{1+1+1+0} = \sqrt{3}$, $\quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|x_3\| = \sqrt{1+1+4+0} = \sqrt{6}$, $\quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|x_4\| = \sqrt{1+1+0+1} = \sqrt{3}$, $\quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ortonormirana baza za $\mathbb{R}^4$ je $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

(#) Zadana je linearni transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$), te mu odrediti po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).

Rj. Prisjetimo se

Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matrica koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je definisana kao $m \times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Standardna baza za $\mathcal{P}_2$ je $\mathcal{S} = \{1, x, x^2\}$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Standardna baza za $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ je $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{S}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x^2)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sljedeće što želimo je odrediti bazu za jezgru i sliku od T.

$$\ker(T) = \{ q \in \mathcal{P}_2 \mid T(q) = 0 \}$$

$$\operatorname{im}(T) = \{ T(p) \mid p \in \mathcal{P}_2 \}$$

Prisjetimo se

<u>Djelovanje operatora kao množenje matricom</u>

<u>Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Tada</u>

$$\underline{[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}}$$

Neka je q proizvoljan polinom iz $\mathcal{P}_2$, $q(x) = a + bx + cx^2$

$$[q]_{\varphi} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Sad možemo pisati

$$\ker(T) = \{ [q]_{\varphi} \mid [T(q)]_{\varphi'} = 0 \} = \{ [q]_{\varphi} \mid [T]_{\varphi\varphi'} [q]_{\varphi} = 0 \}$$

Prema tome $\ker(T) = \ker([T]_{\varphi\varphi'}) = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$.

$$[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{III_v - I_v \\ IV_v - I_v}}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{III_v + II_v \\ IV_v + II_v \cdot (2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{IV_v + III_v \cdot (-3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{III_v : 2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{II_v \cdot (-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{III_v + II_v}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a = 0, \ b = 0, \ c = 0$

$\Rightarrow \ker(T) = \text{span}\{0\}$

$$\text{im}(T) = \left\{ [T(p)]_{\varphi'} \;\middle|\; [p]_\varphi \right\} = \left\{ [T]_{\varphi\varphi'} [p]_\varphi \;\middle|\; [p]_\varphi \right\}$$
$$= \text{im}([T]_{\varphi\varphi'})$$

Osnovne kolone u $[T]_{\varphi\varphi'}$ formiraju bazu za $\text{im}([T]_{\varphi\varphi'})$

$\Rightarrow \text{im}(T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Odredimo još polinom $q \in \mathcal{P}_2$ tako da $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$$[T(q)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = [T]_{\varphi\varphi'} \cdot [q]_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &= 2 \\ a - b + c &= 1 \\ a + b + c &= 5 \\ a + 2b + 4c &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -b + c &= -1 \\ b + c &= 3 \\ 2b + 4c &= 2 \end{aligned}$$

sistem nema rješenje

Ne postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.